**ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2016, № 2**

**УДК 004.42:510.69**

***М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк***
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
вул. Володимирська, 60, м. Київ, 01601

# ЛОГІКИ ІЗ КВАЗІАРНИМИ ТА *n*-АРНИМИ ПРЕДИКАТАМИ: СЕМАНТИЧНІ ТА СИНТАКСИЧНІ АСПЕКТИ

***M. Nikitchenko, S. Shkilniak***
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
Volodymyrska st., 60, Kyiv, 01601

# LOGICS WITH QUASIARY AND *n*-ARY PREDICATES: SEMANTIC AND SYNTACTIC ASPECTS

Запропоновано новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – чисті першопорядкові логіки із квазіарними та *n*-арними предикатами. Вони є синтезом класичних першопорядкових логік та композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів. Описано мови і наведено се манти- чні властивості пропонованих логік. Для формалізації відношень неспростовнісного, істиннісного, хибнісного та сильного логічного наслідку побудовано низку числень секвенційного типу.

**Ключові слова:** логіка, квазіарний предикат, n-арний предикат, секвенційне числення.

A new class of program-oriented logics is proposed – pure first-order logics with quasiary and *n*-ary predicates. They integrate classical first-order logics and composition-nominative logics of quasiary predicates. Logics languages are described and their semantic properties are formulated. Sequent calculi are built for irrefutability, truth, falsity, and strong consequence relations.

**Key words:** logic, quasiary predicate, *n*-ary predicate, sequent calculus.

## Вступ

Апарат математичної логіки є надійним інструментом для створення сучасних програмних систем (див., напр., [1]). При цьому логіки, які використовуються в інформатиці й програмуванні, мають адекватно відображати основні властивості програм. Зокрема, в програмах використовуються різні типи відображень – тотальні відображення фіксованої арності (*n*-арні) та часткові відображення змінної арності (квазіарні). Таким чином, набуває актуальності проблема розробки програмно-орієнтованих логік, базованих на *n*-арних та квазіарних відображеннях. Саме такі логіки запропоновано в цій роботі.

Метою даної статті є побудова та дослідження чистих першопорядкових логік із квазіарними та *n*-арними предикатами. Вони є синтезом класичних першопорядкових логік [2] та композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів, їх названо PFLQA (Pure First-order Logic with Quasi-ary and n-Ary predicates). Як семантичні моделі цих логік, розглянуто алгебри квазіарних предикатів та їх підалгебри різних типів, зокрема, підалгебри еквітонних та *X*-арних предикатів. Описано мови цих логік, досліджено їх семантичні властивості, встановлено зв'язок між *n*-арними та тотальними *X*-арними предикатами. Досліджено відношення неспростовнісного, істиннісного, хибнісного та сильного логічного наслідку. На цій основі для PFLQA побудовано низку числень секвенційного типу. Для цих числень справджуються теореми коректності й повноти.

Поняття, які в цій статті не визначені, тлумачимо в значенні [3–5].

## Квазіарні, *n*-арні, *X*-арні предикати. Мови PFLQA

Квазіарний *V*-*A*-предикат – це часткова функція вигляду $P : {}^{V}A \rightarrow \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень, ${}^{V}A$ – клас всіх *V*-*A*-іменних множин.

 

$V$-$A$-іменна множина ($V$-$A$-ІМ) – це часткова однозначна функція $d : V \to A$, де $V$ і $A$ – множини предметних імен і предметних значень. Для $V$-$A$-ІМ вводимо функцію $asn : {}^VA \to 2^V$ та операції $\|X$, $\|_{-x}$, $\nabla$, $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ (див. [3, 4]).

Далі розглядаємо *однозначні* квазіарні $V$-$A$-предикати. Клас цих предикатів позначимо $PrP_A^V$. Неоднозначні предикати розглянуто, зокрема, в [4–6].

Кожний предикат $P : {}^VA \to \{T, F\}$ визначається парою множин: областю істинності $T(P) = \{d \in {}^VA \mid P(d) = T\}$ та областю хибності $F(P) = \{d \in {}^VA \mid P(d) = F\}$.

Предикат $P$ *тотальний*, якщо $T(P) \cup F(P) = {}^VA$.

Предикат $P$ *неспростовний* (частково істинний), якщо $F(P) = \varnothing$.

Предикат $P$ *еквітонний*, якщо з умови $P(d)\downarrow$ і $d \subseteq d'$ випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Клас еквітонних квазіарних $V$-$A$-предикатів позначимо $PrPE_A^V$.

Предметне ім'я (змінна) $z \in V$ (строго) *неістотне* для предиката $P$, якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^VA$ таких, що $d_1 \|_{-x} = d_2 \|_{-x}$, маємо $P(d_1) = P(d_2)$.

Еквітонний предикат $Q : {}^VA \to \{T, F\}$ назвемо (тотальним) *$X$-арним*, якщо:

– для $Q$ неістотними є усі $z \in V \setminus X$,

– $Q(d)\downarrow$ для кожного $d \in A^X$.

Множину $X$ назвемо арністю $X$-арного предиката $P$ та позначаємо $ar(P)$.

Клас (тотальних) $X$-арних $V$-$A$-предикатів ($X$ фіксована) позначимо $Pra_A^X$.

Клас $\bigcup_{X \text{ скінченне} \subseteq V} Pra_A^X$ усіх $X$-арних предикатів позначимо $Pra_A^V$.

Традиційні $n$-арні предикати [2] вигляду $P : A^n \to \{T, F\}$ можна трактувати як $\{1,..., n\}$-арні. Тому під *$n$-арними предикатами* розуміємо тотальні $\{1,..., n\}$-арні з умовою невизначеності на всіх $d \in A^k$, $k<n$. Для $n$-арного предиката $P$ маємо умови:

– $P(d) = P(d \|\{1,..., n\})$ для всіх $d \in {}^VA$,

– $P(a_1,\dots, a_n,\dots, a_m)\downarrow = P(a_1,..., a_n)$ для кожного $(a_1,\dots, a_n,\dots, a_m) \in A^m$,

– $P(a_1,..., a_n)\downarrow$ для всіх $a_1,..., a_n \in A$ та $P(a_1,..., a_k)\uparrow$ для всіх $(a_1,..., a_k) \in A^k$, $k<n$.

Базовими композиціями PFLQA є базові композиції чистих першопорядкових логік квазіарних предикатів $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$. Такі композиції описані в [3–5].

Кожний тотальний $X$-арний предикат $Q^X$ індукує $n$-арні вигляду $Q^n_{(x_1,...,x_n)}$, де $X = \{x_1,..., x_n\}$. Ці предикати задаються так: $Q^n_{(x_1,...,x_n)} = R^{x_1,...,x_n}_{1,\,...,\,n}(Q^X)$.

Кожний $n$-арний предикат $Q^n$ індукує тотальні $\{x_1,..., x_n\}$-арні предикати $Q^{\{x_1,...,x_n\}}$ (їх кількість нескінченна), вони задаються так: $Q^{\{x_1,...,x_n\}} = R^{1,\,...,\,n}_{x_1,...,x_n}(Q^n)$.

Арність предиката, отриманого за допомогою композиції, визначаємо так:

$ar(\neg P) = ar(P)$; $(P \vee Q) = ar(P) \cup ar(Q)$; $ar(\exists xP) = ar(P) \setminus \{x\}$;

$ar(R^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(P)) = (ar(P) \setminus \{v_1,...,v_n\}) \cup \{x_i \mid v_i \in ar(P),\ i \in \{1,...,n\}\}$.

Композиційну алгебру $QP_A^V = (PrP_A^V, CQ)$, де $CQ = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$, назвемо *чистою першопорядковою алгеброю* (однозначних) квазіарних предикатів.

**Теорема 1**. Класи $PrPE_A^V$ та $Pra_A^V$ замкнені відносно $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$.

Водночас, застосування композиції $\vee$ до $X$-арного та квазіарного предиката дає, взагалі кажучи, квазіарний предикат.

Таким чином, можна виділити такі підалгебри алгебри $QP_A^V = (PrP_A^V, CQ)$:

– $QPE_A^V = (PrPE_A^V, CQ)$ – алгебра еквітонних $P$-предикатів;

– $Ar_A^V = (Pra_A^V, CQ)$ – алгебра $X$-арних предикатів, це підалгебра $QPE_A^V$.

Властивості квазіарних предикатів та їх композицій описано в [3–6].

Семантичними моделями PFLQA є чисті першопорядкові композиційні системи квазіарних предикатів із виділеними $X$-арними предикатами. Вони мають вигляд ($A$, Pr, $CQ$), де $CQ = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$. Кожна така композиційна система задає алгебру даних ($A$, Pr) та композиційну алгебру предикатів (Pr, $CQ$). Множину предикатів можна подати як $\mathrm{Pr} = PrP_A^V \cup Pn_A$, при цьому $PrP_A^V \supset PrPE_A^V \supset Pra_A^V$. Терми композиційної алгебри трактуємо як формули мови. Алфавіт мови PFLQA:

– множини $V$ предметних імен (змінних);

– множина $Cs = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ символів базових композицій;

– множина $Psq$ символів базових квазіарних предикатів;

– множина $Psn$ символів базових $n$-арних предикатів.

Із кожним $p \in Psn$ пов'язане натуральне число $n$ – *арність* такого символу; арність символу $p$ позначаємо $ar(p)$. Це означає, що задана функція $ar : Psn ® \ 2^V$.

Символ $p \in Psn$ із арністю $n$ також позначаємо $p^n$.

Сигнатура мови – це $Ps = Psq \cup Psn$, розширена сигнатура – це $\Sigma = (V, Cs, Ps)$.

Індуктивне визначення множини $Fr$ формул (тут префіксна форма запису):

Fq) $Psq \subseteq Fr$; формули $q \in Psq$ назвемо атомарними;

Fn) нехай $p^n \in Psn$, $x_1,..., x_n \in V$, тоді $p^n x_1...x_n \in Fr$; такі формули назвемо арними атомарними, множину цих формул позначимо $Fat$.

FC) $\Phi, \Psi \in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi \in Fr$.

Виділимо підмножину *арних* формул $Far = \{\Phi \in Fr \,|\, \sigma(\Phi) \subseteq Psn\}$, де $\sigma(\Phi)$ – множина всіх $p \in Ps$ формули $\Phi$. Формули $Far$ інтерпретуємо як $X$-арні предикати.

Далі вживаємо скорочення формул (їх теж будемо називати формулами), користуючись [3, 4] інфіксною формою запису і символами похідних композицій.

Інтерпретуємо мову PFLQA на композиційних системах CS = ($A$, Pr, $CQ$). Символи $Psn$ позначають базові $n$-арні предикати, символи $Psq$ – базові квазіарні предикати. Для опису цих позначень задамо тотальні однозначні $I_0 : Psn \to Pn_A$ та $I_q : Psq \to PrP_A^V$. Як і в класичній логіці, базові $n$-арні предикати мають віртуальний характер, вони є базою побудови традиційних $X$-арних предикатів, які залежать від змінних множини $V$. На основі $I_0$ задаємо відображення $I_a : Fat \to Pra_A^V$, яке визначає базові $X$-арні предикати: $I_a(p^n x_1...x_n) = \mathrm{R}_{x_1,...,x_n}^{1,\,...,\,n}(I_0(p^n))$.

Відображення інтерпретації формул $I : Fr \to PrP_A^V$ задамо як сумісне продовження $I_a$ та $I_q$ згідно з побудовою формул за допомогою символів $Cs$:

– $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$, $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$;

– $I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi))$, $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Трійку $\boldsymbol{J}$ = (CS, $\Sigma$, $I$) назвемо *інтерпретацією* мови PFLQA сигнатури $\Sigma$.

Скорочено інтерпретації мови позначаємо як ($A$, $\Sigma$, $I$) чи ($A$, $I$).

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ – значення формули $\Phi$ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ – позначимо $\Phi_J$.

$n$-арний предикат $I_0(p^n)$, де $p^n \in Psn$, також позначаємо $p_J^n$.

**Теорема 2.** Маємо $(p^n x_1...x_n)_J(d) = p_J^n(d(x_1),...,d(x_n))$, де $d \in {}^V\!A$,.

**Теорема 3.** $T((p^n x_1 ... x_n)_J) \cup F((p^n x_1 ... x_n)_J) = \bigcap_{1 \le k \le n} Ex_k$,

$T((p^n x_1 ... x_n)_J) \subseteq \bigcap_{1 \le k \le n} Ex_k$, $F((p^n x_1 ... x_n)_J) \subseteq \bigcap_{1 \le k \le n} Ex_k$ .

Тут $Ez$ – спеціальні предикати-індикатори $Ez$ наявності в даних компонентах з відповідним $z \in V$ (див. [5]), задаємо їх так: $T(Ez) = \{d \,|\, d(z)\downarrow\}$; $F(Ez) = \{d \,|\, d(z)\uparrow\}$.

Φ неспростовна при інтерпретації ***J***, або ***J***-*неспростовна* (позн. ***J*** |= Φ), якщо $\Phi_J$ – неспростовний. Φ *неспростовна* (позн. |= Φ), якщо ***J*** |= Φ для всіх ***J***.

Для кожного $q \in Psq$ множину гарантовано неістотних імен задамо за допомогою тотальної $\nu : Psq \to 2^V$, яка продовжується (див. [4]) до $\nu : Fr \to 2^V$:

Кожне $u \in \nu(\Phi)$ неістотне [4] для формули Φ.

Ми постулюємо нескінченність множини $V_T = \bigcap_{p \in Ps} \nu(p)$ тотально неістотних імен, що необхідна [4] для еквівалентних перетворень формул.

Позначимо $nm(\Phi)$ множину тих $x \in V$, що наявні в символах $R_{\bar{y}}^{\bar{v}}$ та $\exists x$ цієї Φ.

Задамо множину «нових» для Φ неістотних імен: $fu(\Phi) = V_T \setminus nm(\Phi)$.

Для довільної $\Gamma \subseteq Fr$ задаємо $\nu(\Gamma) = \bigcap_{\Phi \in \Gamma} \nu(\Phi)$ та $fu(\Gamma) = V_T \setminus nm(\Gamma)$.

Для формул, які задають *X*-арні предикати, функцію арності $ar : Far \to 2^V$ задаємо як продовження функції $ar : Psn \to 2^V$ таким чином:

$ar(\neg\Phi) = ar(\Phi)$; $ar(\vee\Phi\Psi) = ar(\Phi) \cup ar(\Psi)$; $ar(\exists x\Phi) = ar(\Phi) \setminus \{x\}$;

$ar(R_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\Phi)) = (ar(\Phi) \setminus \{v_1,...,v_n\}) \cup \{x_i \,|\, v_i \in ar(\Phi),\ i \in \{1,...,n\}\}$ .

Для формул $\Phi \in Far$ функцію ν можна задати через функцію арності *ar*:

**Теорема 4.** $\Phi \in Far \Rightarrow \nu(\Phi) = V \setminus ar(\Phi)$.

### Семантичні властивості PFLQA

Для формалізації поняття логічного наслідку введено [4-6] низку відношень на множині формул. Нехай $\Gamma \subseteq Fr$, $\Delta \subseteq Fr$. Будемо позначати:

$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_J)$ як $T^{\wedge}(\Gamma_J)$, $\bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_J)$ як $F^{\wedge}(\Delta_J)$, $\bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_J)$ як $T^{\vee}(\Delta_J)$, $\bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_J)$ як $F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Задамо відношення наслідку для $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$ при фіксованій інтерпретації ***J***:

Δ є *IR*-наслідком Γ при ***J*** (позн. $\Gamma\ _J|=_{ID} \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J) \cap F^{\wedge}(\Delta_J) = \varnothing$ ;

Δ є *T*-наслідком Γ при ***J*** (позн. $\Gamma\ _J|=_T \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J) \subseteq T^{\wedge}(\Delta_J)$ ;

Δ є *F*-наслідком Γ при ***J*** (позн. $\Gamma\ _J|=_F \Delta$), якщо $F^{\wedge}(\Delta_J) \subseteq F^{\wedge}(\Gamma_J)$ ;

Δ є *TF*-наслідком Γ при ***J*** (позн. $\Gamma\ _J|=_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma\ _J|=_T \Delta$ та $\Gamma\ _J|=_F \Delta$.

Відповідні відношення логічного наслідку визначаємо за схемою:

$\Gamma |=_* \Delta$, якщо $\Gamma\ _J|=_* \Delta$ для кожної інтерпретації ***J***.

Зокрема, отримуємо відношення наслідку при фіксованій інтерпретації ***J*** для двох формул та відношення логічного наслідку для двох формул.

Між відношеннями логічного наслідку маємо [5] такі співвідношення:

$|=_{TF} \subset |=_T$, $|=_{TF} \subset |=_F$; $|=_T \not\subset |=_F$, $|=_F \not\subset |=_T$; $|=_T \subset |=_{IR}$, $|=_F \subset |=_{IR}$.

Властивості відношень логічного наслідку досліджено, зокрема, в [4-6].

Відношення еквівалентності при інтерпретації ***J*** задаємо за такою схемою:

$\Phi\ _J\!\sim_* \Psi$, якщо $\Phi\ _J|=_* \Psi$ та $\Psi\ _J|=_* \Phi$.

Відношення логічної еквівалентності $\sim_{IR}$, $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$ визначаємо за схемою:

$\Phi \sim_* \Psi$, якщо $\Phi |=_* \Psi$ та $\Psi |=_* \Phi$.

Для відношення ${}_J{\sim}_{TF}$ маємо: $\Phi\ {}_J{\sim}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J)$.

Отже, $\Phi\ {}_J{\sim}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi_J = \Psi_J$, тобто $\Phi_J$ та $\Psi_J$ – один і той же предикат.

Опишемо властивості формул, пов’язані з кванторами та реномінаціями.

Ren) $\exists y\Phi \models_{TF} \exists z R_z^y(\Phi)$ за умови $z\in\nu(\Phi)$;

R) $R(\Phi) \models_{TF} \Phi$;

RI) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \models_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$;

RU) $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \models_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $z\in\nu(\Phi)$;

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \models_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)$;

R¬) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \models_{TF} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$;

R∨) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi) \models_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$;

R∃s) $R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi \models_{TF} \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $x\notin\{\bar{v},\bar{u}\}$;

R∃) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y(\Phi) \models_{TF} \neg z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)$ за умови $z\in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

Для арних атомарних формул додатково маємо (тут $p^n\in Psn$):

Rar) $R_{y_1,\dots,y_m}^{v_1,\dots,v_m}(p^n x_1,\dots,x_n) \models_{TF} p^n z_1,\dots,z_n,\ \ z_i = \begin{cases} x_i, \text{ якщо } x_i\notin\{v_1,\dots,v_m\}, \\ y_j, \text{ якщо } x_i = v_j \text{ для деякого } v_j. \end{cases}$

Основою еквівалентних перетворень формул мови PFLQA є

**Теорема 5** (еквівалентності). Нехай Φ' отримано з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$. Якщо $\Phi_1 \sim_* \Psi_1, ..., \Phi_n \sim_* \Psi_n$, то $\Phi \sim_* \Phi'$.

Тут $\sim_*$ – це $\sim_{TF}$ чи $\sim_{IR}$, а для $\sim_T$ та $\sim_F$ еквівалентності невірна (див. [4, 5]).

Кожна формула PFLQA зводиться до класичноподібної нормальної форми.

Формула Ψ *нормальна*, якщо всі символи реномінації формули Ψ (якщо вони є) застосовані тільки до предикатних символів, і всі входження кванторних префіксів у Ψ (якщо вони є) – по різних тотально неістотних іменах.

**Теорема 6.** Для кожної формули Φ можна збудувати нормальну Ψ: $\Phi \sim_{TF} \Psi$.

Опишемо основні властивості відношень логічного наслідку.

**Теорема 7** (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim_* \Psi$ (тут $\sim_*$ та $\models_*$ – це $\sim_{TF}$, $\sim_{IR}$ та $\models\sim_{TF}$, $\models\sim_{IR}$), тоді: $\Phi, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_* \Delta$; $\Gamma \models_* \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_* \models \Delta, \Psi$.

Надалі, якщо інше не зазначене окремо, $\models$ – одне з $\models_{IR}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$.

Для всіх уведених відношень маємо монотонність:

*M*) Нехай $\Gamma\subseteq\Lambda$ та $\Delta\subseteq\Sigma$, тоді $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Lambda \models \Sigma$.

Для $\models_{IR}$ можна (див. [4, 5]) переносити формулу з лівої частини логічного наслідку в праву і навпаки, знімаючи чи навішуючи заперечення, проте для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ таке робити не можна. Така ж ситуація і для арних атомарних формул.

**Теорема 8.** Для арних атомарних формул можливі наступні ситуації:

1) $\neg p\bar{z}, \Gamma \models_{TF} \Delta$ та $\Gamma \not\models_T \Delta, p\bar{z}$; $p\bar{z}, \Gamma \models_{TF} \Delta$ та $\Gamma \not\models_T \Delta, \neg p\bar{z}$;

2) $\Gamma \models_{TF} \Delta, p\bar{z}$ та $\neg p\bar{z}, \Gamma \not\models_F \Delta$; $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg p\bar{z}$ та $p\bar{z}, \Gamma \not\models_F \Delta$.

Опишемо умови, які гарантують наявність того чи іншого логічного наслідку. Для цього використаємо поняття *Rs*-*Un*-еквівалентних формул (див. [5]).

Нехай $\Gamma\subseteq Fr$, $\Delta\subseteq Fr$, $Un = \{x \mid Ex\in\Delta\}$.

$C_{Un}$) Нехай формули Ψ та Ξ – *Rs*-*Un*-еквівалентні, тоді $\Psi, \Gamma \models \Xi, \Delta$; зокрема, $\Phi, \Gamma \models \Phi, \Delta$;

$CL_{Un}$) нехай формули Ψ та Ξ – *Rs*-*Un*-еквівалентні, тоді $\Psi, \neg\Xi, \Gamma \models_T \Delta$;

**ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2016, № 2**

зокрема, $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models_T \Delta$;

*CR*$_{Un}$) нехай формули $\Psi$ та $\Xi$ – *Rs-Un*-еквівалентні, тоді $\Gamma \models_F \Psi, \neg\Xi, \Delta$; зокрема, $\Gamma \models_F \Phi, \neg\Phi, \Delta$;

*CLR*$_{Un}$) нехай $\varphi, \xi$ – *Rs-Un*-еквівалентні та $\theta, \omega$ – *Rs-Un*-еквівалентні, тоді $\varphi, \neg\xi, \Gamma \models_{TF} \theta, \neg\omega, \Delta$; зокрема, $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models_{TF} \Psi, \neg\Psi, \Delta$.

Властивості декомпозиції формул мають традиційний (див. [4]) вигляд:

$\neg\neg_L$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg\neg_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$;

$\vee_L$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$;

$\neg\vee_L$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\Psi$.

Для $\models_{IR}$ додатково маємо властивості (для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ вони невірні):

$\neg_L$) $\neg\Phi, \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} \Delta, \Phi$;

$\neg_R$) $\Gamma \models_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_{IR} \Delta$.

Властивості еквівалентних перетворень отримуємо на основі властивостей R, RI, RU, RR, R$\neg$, R$\vee$, R$\exists$s, R$\exists$. Кожна така R$*$ продукує 4 відповідні властивості R$*_L$, R$*_R$, $\neg$R$*_L$, $\neg$R$*_R$, коли виділена формула, чи її заперечення, знаходиться у лівій чи правій частині відношення $\models$.

Властивості елімінації кванторів, *E*-розподілу та первісного означення:

$\exists_L$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\neg\exists_R$) $\Gamma \models \neg\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \models \neg R_z^x(\Phi), \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\exists v_R$) $Ey, \Gamma \models \exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow Ey, \Gamma \models \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \Delta$;

$\neg\exists v_L$) $\neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta$.

Ed) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ey, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, Ey$;

Ev) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta)$.

Наведемо властивості PFLQA, пов'язані з арними атомарними формулами.

Властивості продукування арних атомарних формул:

Ra$_L$) $R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow p\bar{z}, \Gamma \models \Delta$, де $p \in Psn$;

R$\neg$a$_L$) $\neg R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg p\bar{z}, \Gamma \models \Delta$, де $p \in Psn$;

Ra$_R$) $\Gamma \models R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models p\bar{z}, \Delta$, де $p \in Psn$;

R$\neg$a$_R$) $\Gamma \models \neg R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \neg p\bar{z}, \Delta$, де $p \in Psn$.

Тут $\bar{z}$ визначається так, як описано в Rar.

Для $\models_{IR}$ маємо властивості означення для арних атомарних формул:

Da$_L$) $p^n x_1...x_n, \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow p^n x_1...x_n, Ex_1, ..., Ex_n, \Gamma \models_{IR} \Delta$;

Da$_R$) $\Gamma \models_{IR} \Delta, p^n x_1...x_n \Leftrightarrow Ex_1, ..., Ex_n, \Gamma \models_{IR} \Delta, p^n x_1...x_n$.

Для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ властивості Da$_L$ та Da$_R$ вже невірні. Для $\models_T$ та $\models_F$ маємо:

DTa$_L$) $p^n x_1...x_n, \Gamma \models_T \Delta \Leftrightarrow p^n x_1...x_n, Ex_1, ..., Ex_n, \Gamma \models_T \Delta$;

DT$\neg$a$_L$) $\neg p^n x_1...x_n, \Gamma \models_T \Delta \Leftrightarrow \neg p^n x_1...x_n, Ex_1, ..., Ex_n, \Gamma \models_T \Delta$;

DFa$_R$) $\Gamma \models_F \Delta, p^n x_1...x_n \Leftrightarrow Ex_1, ..., Ex_n, \Gamma \models_F \Delta, p^n x_1...x_n$;

DF$\neg$a$_R$) $\Gamma \models_F \Delta, \neg p^n x_1...x_n \Leftrightarrow Ex_1, ..., Ex_n, \Gamma \models_F \Delta, \neg p^n x_1...x_n$.

 

**Приклад.** Маємо $Ex, p^1x \vee \neg Ex \models_T p^1x$, водночас $p^1x \vee \neg Ex \not\models_T p^1x$.

Маємо $p^1x, Ex \models_F p^1x \,\&\, Ex$, водночас $p^1x \not\models_F p^1x \,\&\, Ex$.

Таком чином, для $\models_T$ немає аналога властивості $\mathrm{Da_R}$, для $\models_F$ немає аналога властивості $\mathrm{Da_L}$, а для $\models_{TF}$ немає аналогів властивостей $\mathrm{Da_L}$ і $\mathrm{Da_R}$.

**Секвенційні числення для PFLQA**

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови для PFLQA числень секвенційного типу. Пропоновані числення *QAC, QAL, QAR, QALR* формалізують відношення логічного наслідку $\models_{IR}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$. Вони можуть трактуватися як розширення описаних в [5] відповідних числень $Q_BC$, $Q_BR$, $Q_BL$, $Q_BLR$ для чистих першопорядкових КНЛ.

Секвенційні числення будуємо в стилі семантичних таблиць. Секвенція – це множина специфікованих символами |– чи –| формул. Виділяючи так специфіковані формули, секвенції позначаємо як ${}_{\vdash}\Gamma {}_{\dashv}\Delta$, не деталізуючи – позначаємо як $\Sigma$.

Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Для замкненої ${}_{\vdash}\Gamma {}_{\dashv}\Delta$ має бути $\Gamma \models \Delta$. Правила виведення секвенційного числення – секвенційні форми; вони будуються на основі властивостей відповідних відношень $\models$. Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція $\Sigma$ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем $\Sigma$.

Секвенційні числення будуємо так: ${}_{\vdash}\Gamma {}_{\dashv}\Delta$ вивідна $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$.

Умови, які гарантують наявність логічного наслідку, індукують відповідні умови замкненості секвенції ${}_{\vdash}\Gamma {}_{\dashv}\Delta$. Для кожного з $\models_{IR}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ вірна умова:

С) існують *Rs-Un*-еквівалентні формули $\Psi$ та $\Xi$ такі: $\Psi \in \Gamma$ та $\Xi \in \Delta$;

зокрема, якщо існує $\Phi$: $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

Додаткові умови CL, CR, CLR замкненості ${}_{\vdash}\Gamma {}_{\dashv}\Delta$ істотні для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$:

CL) існують *Rs-Un*-еквівалентні формули $\Psi$ та $\Xi$ такі: $\Psi \in \Gamma$ та $\neg\Xi \in \Delta$;

зокрема, якщо існує формула $\Phi$: $\Phi \in \Gamma$ та $\neg\Phi \in \Gamma$;

CR) існують *Rs-Un*-еквівалентні формули $\Psi$ та $\Xi$ такі: $\Psi \in \Delta$ та $\neg\Xi \in \Delta$;

зокрема, якщо існує формула $\Phi$: $\Phi \in \Delta$ та $\neg\Phi \in \Delta$;

CLR) існують *Rs-Un*-еквівалентні формули $\varphi$, $\xi$ та *Rs-Un*-еквівалентні формули $\theta$, $\omega$ такі: $\varphi \in \Gamma$, $\neg\xi \in \Gamma$, $\theta \in \Delta$, $\neg\omega \in \Delta$;

зокрема, якщо існують формули $\Phi$ та $\Psi$ такі: $\Phi \in \Gamma$, $\neg\Phi \in \Gamma$, $\Psi \in \Delta$, $\neg\Psi \in \Delta$.

У випадку числень для $\models_{IR}$ умови CL, CR, CLR зводяться до С.

Розглянемо різновиди секвенційних числень PFLQA

Числення *QALR* формалізує $\models_{TF}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CLR}$.

Базовими секвенційними формами числення *QALR* є описані в [5] форми ⊢RR, ⊣RR, ⊢¬RR, ⊣¬RR, ⊢R¬, ⊣R¬, ⊢¬R¬, ⊣¬R¬, ⊢R∨, ⊣R∨, ⊢¬R∨, ⊣¬R∨, ⊢R∃s, ⊣R∃s, ⊢¬R∃s, ⊣¬R∃s, ⊢R∃, ⊣R∃, ⊢¬R∃, ⊣¬R∃, ⊢¬¬, ⊣¬¬, ⊢∨, ⊣∨, ⊢¬∨, ⊣¬∨ , ⊢∃, ⊣¬∃, ⊢¬∃v, ⊣∃v, до яких додаємо форми продукування арних атомарних формул, індуковані властивостями $\mathrm{Ra_L}$, $\mathrm{R\neg a_L}$, $\mathrm{Ra_R}$, $\mathrm{R\neg a_R}$:

$${}_{\vdash}\mathrm{Ra}\ \frac{{}_{\vdash} p\bar{z}, \Sigma}{{}_{\vdash} R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}), \Sigma}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{Ra}\ \frac{{}_{\dashv} p\bar{z}, \Sigma}{{}_{\dashv} R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}), \Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{Ra}\ \frac{_{\vdash}\neg p\bar{z},\Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}),\Sigma};\qquad _{\dashv}\neg\mathrm{Ra}\ \frac{_{\dashv}\neg p\bar{z},\Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}),\Sigma}.$$

Для цих форм $p\in Psn$, а $\bar{z}$ визначається так, як описано у властивості Rar.

Окрім базових форм, можна використовувати допоміжні форми спрощення. $_{\vdash}$R, $_{\dashv}$R, $_{\vdash}\neg$R, $_{\dashv}\neg$R, $_{\vdash}$RI, $_{\dashv}$RI, $_{\vdash}\neg$RI, $_{\dashv}\neg$RI, $_{\vdash}$RU, $_{\dashv}$RU, $_{\vdash}\neg$RU, $_{\dashv}\neg$RU. Перетворення на їх основі вже закладені в умови замкненості секвенції: для встановлення *Rs*-*Un*-еквівалентності формул необхідна побудова *Rs*-форм для цих формул [5], що робиться на основі властивостей RI, RU, R, які лежать в основі форми спрощення.

Числення *QAL* формалізує $|=_T$. Умова замкненості секвенції: C $\vee$ CL.

Базовими секвенційними формами є наведені вище базові форми числення *QALR*, до яких додаємо форми, індуковані властивостями $\mathrm{DTa_L}$ та $\mathrm{DT\neg a_L}$.

$$_{\vdash}\mathrm{Da}\ \frac{_{\vdash}p^n x_1...x_n,\ _{\vdash}Ex_1,...,\ _{\vdash}Ex_n,\Sigma}{_{\vdash}p^n x_1...x_n,\Sigma};\ _{\vdash}\mathrm{D\neg a}\ \frac{_{\vdash}\neg p^n x_1...x_n,\ _{\vdash}Ex_1,...,\ _{\vdash}Ex_n,\Sigma}{_{\vdash}\neg p^n x_1...x_n,\Sigma}.$$

Числення *QAR* формалізує $|=_F$. Умова замкненості секвенції: C $\vee$ CR.

Базовими секвенційними формами є наведені вище базові форми числення *QALR*, до яких додаємо форми, індуковані властивостями $\mathrm{DFa_R}$, $\mathrm{DF\neg a_R}$.

$$_{\dashv}\mathrm{Da}\ \frac{_{\dashv}p^n x_1...x_n,\ _{\vdash}Ex_1,...,\ _{\vdash}Ex_n,\Sigma}{_{\dashv}p^n x_1...x_n,\Sigma};\ _{\dashv}\mathrm{D\neg a}\ \frac{_{\dashv}\neg p^n x_1...x_n,\ _{\vdash}Ex_1,...,\ _{\vdash}Ex_n,\Sigma}{_{\dashv}\neg p^n x_1...x_n,\Sigma}.$$

Форми $_{\vdash}$Da, $_{\vdash}$D$\neg$a, $_{\dashv}$Da, $_{\dashv}$D$\neg$a застосовуються до $p^n x_1...x_n$ чи $\neg p^n x_1...x_n$ лише один раз на даному шляху при її першій появі як активної формули.

Числення *QAC* формалізує $|=_{IR}$. Умова замкненості секвенції: C.

Базовими секвенційними формами є $_{\vdash}$RR, $_{\dashv}$RR, $_{\vdash}$R$\neg$, $_{\dashv}$R$\neg$, $_{\vdash}$R$\vee$,$_{\dashv}$R$\vee$, $_{\vdash}$R$\exists$s, $_{\dashv}$R$\exists$s, $_{\vdash}$R$\exists$, $_{\dashv}$R$\exists$, $_{\vdash}\neg\neg$, $_{\dashv}\neg\neg$, $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$, $_{\vdash}\neg\vee$, $_{\dashv}\neg\vee$, $_{\vdash}\exists$, $_{\dashv}\neg\exists$, $_{\vdash}\neg\exists$v, $_{\dashv}\exists$v, до яких додаємо форми $_{\vdash}$Ra, $_{\dashv}$Ra та індуковані властивостями $\mathrm{Da_L}$ і $\mathrm{Da_R}$ форми $_{\vdash}$Da і $_{\dashv}$Da.

Допоміжні форми спрощення: $_{\vdash}$R, $_{\dashv}$R, $_{\vdash}$RI, $_{\dashv}$RI, $_{\vdash}$RU, $_{\dashv}$RU.

Властивості відношень логічного наслідку індукують основну властивість базових секвенційних форм:

**Теорема 9.** 1. Нехай $\dfrac{_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}}{_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta}$ – базова форма; тоді:

a) $\Lambda\,|=\mathrm{K} \Leftrightarrow \Gamma\,|=\Delta$; b) $\Gamma\,|\neq\Delta \Leftrightarrow \Lambda\,|\neq\mathrm{K}$.

2. Нехай $\dfrac{_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}\quad _{\vdash}\mathrm{X}_{\dashv}\mathrm{Z}}{_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta}$ – базова форма; тоді:

a) $\Lambda\,|=_*\mathrm{K}$ та $\mathrm{X}\,|=_*\mathrm{Z} \Leftrightarrow \Gamma\,|=_*\Delta$; b) $\Gamma\,|\neq_*\Delta \Leftrightarrow \Lambda\,|\neq_*\mathrm{K}$ або $\mathrm{X}\,|\neq_*\mathrm{Z}$.

Для кожного з пропонованих числень *QAC*, *QAL*, *QAR*, *QALR* вірні теореми коректності та повноти. Для доведення повноти пропонованих секвенційних числень використовуємо метод модельних множин (подібні доведення див. [3, 7]).

**Теорема 10** (коректності). Секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна $\Rightarrow \Gamma\,|=\Delta$.

**Теорема 11** (повноти). $\Gamma\,|=\Delta \Rightarrow$ секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна.

Тут вивідності секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ в численні *QAC*, *QAL*, *QAR*, *QALR* відповідає відношення логічного наслідку $|=_{IR}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$.

## Висновки

У роботі запропоновано новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – чисті першопорядкові логіки із квазіарними та базовими *n*-арними предикатами. Вони є природним синтезом класичних першопорядкових логік та композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів. Розглянуто семантичні моделі та мови, досліджено семантичні властивості пропонованих логік. Встановлено зв'язок між *n*-арними та тотальними *X*-арними предикатами, наведено властивості, пов'язані з арними атомарними формулами. Описано відношення неспростовнісного, істиннісного, хибнісного та сильного логічного наслідку. На цій основі для пропонованих логік побудовано низку числень секвенційного типу. Для побудованих числень справджуються теореми коректності й повноти.

## Література

1. Handbook of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T.S.E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. S.C. Kleene. Mathematical Logic. – New York: John Wiley & Sons. – 1967. – 398 p.
3. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
4. Нікітченко М.С. Прикладна логіка / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
5. Nikitchenko M. Properties of Logics of Quasiary Predicates / M. Nikitchenko, S. Shkilniak // Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. August 24–29, 2015, Chisinau, Moldova.— P. 180–197.
6. Нікітченко М.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 73–86.
7. Шкільняк С.С. Спектр секвенційних числень першопорядкових композиційно-номінативних логік / С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2013. – № 3. – С. 22–37.

## Literatura

1. Handbook of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T.S.E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. S.C. Kleene. Mathematical Logic. – New York: John Wiley & Sons. – 1967. – 398 p.
3. Nikitchenko M.S. Matematychna logika ta teoria algorytmiv / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak. – К.: VPC Kyivskyi universytet, 2008. – 528 p.
4. Nikitchenko M.S. Prykladna logika/M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak. – К.: VPC Kyivskyi universytet, 2013. – 278 p.
5. Nikitchenko M.S. Chysti pershoporiadkovi logiky kvaziarnyh predykativ / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak // Probl. programuvannia. – 2016. – № 2–3. – P. 73–86.
6. Nikitchenko M. Properties of Logics of Quasiary Predicates / M. Nikitchenko, S. Shkilniak // Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. August 24–29, 2015, Chisinau, Moldova - P. 180–197.
7. Shkilniak S.S. Spektr sekventciinyh chyslen pershoporiadkovyh kompozytsiino-nominatyvnyh logik / S.S. Shkilniak // Probl. programuvannia. – 2013. – № 3. – P. 22–37.

## RESUME

**M. Nikitchenko, S. Shkilniak**

### Logics with quasiary and *n*-ary predicates: semantic and syntactic aspects

Mathematical logic is an important instrument for construction of modern information systems. At the same time, logics used in programming and mathematics should adequately represent main properties of programs. In particular, various types of mappings – total mappings of fixed arity (*n*-ary mappings) and partial mappings of varying arity (quasiary mappings) – are wildly used in programming. Such specifics of programs call for construction and investigation of new, program-oriented, logics based on *n*-ary and quasiary mappings. Such logics are proposed in this paper – Pure First-order Logics with Quasiary and *n*-Ary predicates (PFLQA). These logics synthesize classical first-order logics and composition-

 

nominative logics of quasiary predicates. Algebras of quasiary predicates and their different subalgebras, in particular, subalgebras of Equitone and *X*-ary predicates, are considered as semantic models of PFLQA. The following basic operations (compositions) are specified for these algebras: disjunction, negation, renomination, and existential quantifier. The language of PFLQA is defined on this base. Semantic properties of the algebras are investigated. The relations between *n*-ary and quasiary mappings are studied. Formula properties related to renominations and quantifiers are formulated. Different normal forms and equivalence relations are specified.

The following consequence relations are investigated: irrefutability consequence $|=_{IR}$, truth consequence $|=_T$, falsity consequence $|=_F$, strong consequence $|=_{TF}$. Semantic properties of these consequences are investigated; special properties of PFLQA related to atomic formulas are formulated. Properties of consequence relations form a semantic basis for corresponding calculi of sequent type. Such calculi for PFLQA are proposed in this paper. For these calculi basic sequent forms and closedness conditions are formulated. Validity and completeness theorems hold for the constructed calculi.

*Надійшла до редакції 31.10.2016*